SPRAWDZIAN · MATEMATYKA

Sprawdzian z rachunku różniczkowego

Grupa A

Matematyka: pochodna funkcji i jej zastosowania

Imię i nazwisko: _____

Klasa: _____

Data: _____

Punkty: _____ / 18

10 zadań, 18 pkt. Czytaj uważnie polecenia. W zadaniach otwartych zapisz obliczenia.

Zadanie 1. (0–1 pkt)

Pochodna funkcji $f(x) = 4x^3 - 2x$ jest równa:

(A) $12x^2 - 2x$
(B) $12x^2 - 2$
(C) $4x^2 - 2$
(D) $12x^3 - 2$

Zaznacz jedną poprawną odpowiedź.

Zadanie 2. (0–1 pkt)

Pochodna funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ (dla $x > 0$) to:

(A) $\sqrt{x}$
(B) $2\sqrt{x}$
(C) $\frac{1}{\sqrt{x}}$
(D) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Zaznacz jedną poprawną odpowiedź.

Zadanie 3. (0–1 pkt)

Funkcja f(x) = $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ ma

(A) maximum w x = 2
(B) punkt przegięcia w x = 2
(C) minimum w x = 2
(D) brak punktów szczególnych

Zaznacz jedną poprawną odpowiedź.

Zadanie 4. (0–1 pkt)

Pochodna f(x) = x·ln(x) jest równa

(A) ln(x)
(B) 1/x
(C) ln(x) + 1
(D) x/ln(x)

Zaznacz jedną poprawną odpowiedź.

Zadanie 5. (0–1 pkt)

Funkcja f(x) = $x^3 - 3x$ ma minimum lokalne dla

(A) x = −3
(B) x = −1
(C) x = 0
(D) x = 1

Zaznacz jedną poprawną odpowiedź.

Zadanie 6. (0–1 pkt)

Granica lim(x→0) (sin x)/x wynosi

(A) nie istnieje
(B) ∞
(C) 0
(D) 1

Zaznacz jedną poprawną odpowiedź.

Zadanie 7. (0–3 pkt)

Oblicz pochodną funkcji $f(x) = \frac{2}{x} + 3x^2$.

Zadanie 8. (0–3 pkt)

Oblicz pochodną funkcji $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 7$.

Zadanie 9. (0–3 pkt)

Zbadaj funkcję $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ i wyznacz jej ekstrema lokalne (podaj rodzaj i wartość).

Zadanie 10. (0–3 pkt)

Zbadaj funkcję $f(x) = x^3 - 3x^2$ i wyznacz jej ekstrema lokalne (podaj rodzaj i wartość).

Rozwiąż ten sprawdzian online, z wyjaśnieniem każdej odpowiedzi: matury-online.pl/sprawdzian/matematyka/rachunek-rozniczkowy

SPRAWDZIAN · MATEMATYKA

Sprawdzian z rachunku różniczkowego

Grupa B

Matematyka: pochodna funkcji i jej zastosowania

Imię i nazwisko: _____

Klasa: _____

Data: _____

Punkty: _____ / 18

10 zadań, 18 pkt. Czytaj uważnie polecenia. W zadaniach otwartych zapisz obliczenia.

Zadanie 1. (0–1 pkt)

Pochodna funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x$ jest równa:

(A) $2x^3 - 3$

(B) $\frac{1}{2}x^3 - 3$

(C) $2x^4 - 3$

(D) $2x^3 - 3x$

Zaznacz jedną poprawną odpowiedź.

Zadanie 2. (0–1 pkt)

Pochodna f(x) = √(3x + 1) jest równa

(A) 3√(3x+1)

(B) √3/(2√(3x+1))

(C) 3/(2√(3x+1))

(D) 1/(2√(3x+1))

Zaznacz jedną poprawną odpowiedź.

Zadanie 3. (0–1 pkt)

Pochodna f(x) = ln(x²+1) jest równa

(A) 1/(x²+1)

(B) 2x/(x²+1)

(C) 2x·ln(x²+1)

(D) x/(x²+1)

Zaznacz jedną poprawną odpowiedź.

Zadanie 4. (0–1 pkt)

Jeśli f'(x) > 0 dla x ∈ (a, b) i f'(x) < 0 dla x ∈ (b, c), to w punkcie x = b funkcja f

(A) nie jest ciągła

(B) ma minimum lokalne

(C) ma maximum lokalne

(D) ma punkt przegięcia

Zaznacz jedną poprawną odpowiedź.

Zadanie 5. (0–1 pkt)

Pochodna f(x) = (2x+1)³ jest równa

(A) 6x(2x+1)²

(B) 6(2x+1)²

(C) (2x+1)²

(D) 3(2x+1)²

Zaznacz jedną poprawną odpowiedź.

Zadanie 6. (0–1 pkt)

Pochodna funkcji $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$ jest równa:

(A) $f'(x) = 3x^2 - 8x$

(B) $f'(x) = 3x^2 - 4x$

(C) $f'(x) = x^2 - 8x$

(D) $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$

Zaznacz jedną poprawną odpowiedź.

Zadanie 7. (0–3 pkt)

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Zadanie 8. (0–3 pkt)

Ogrodnik ma do dyspozycji 20 m siatki. Chce ogrodzić prostokątny ogródek. Jakie wymiary powinien mieć ogródek, aby jego pole było jak największe?

Zadanie 9. (0–3 pkt)

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x^3 - 3x$.

Zadanie 10. (0–3 pkt)

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

Rozwiąż ten sprawdzian online, z wyjaśnieniem każdej odpowiedzi: matury-online.pl/sprawdzian/matematyka/rachunek-rozniczkowy

Sprawdzian z rachunku różniczkowego

Grupa A

1. (1 pkt) **B**

2. (1 pkt) **D**

3. (1 pkt) **B**

4. (1 pkt) **C**

5. (1 pkt) **D**

6. (1 pkt) **D**

7. (3 pkt) Przykładowa odpowiedź: $\frac{2}{x} = 2x^{-1}$, więc jej pochodna to $-2x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$. Pochodna $3x^2$ to $6x$. Zatem $f'(x) = -\frac{2}{x^2} + 6x$.
Punktacja: Zapisanie $\frac{2}{x}$ jako $2x^{-1}$ i obliczenie jej pochodnej $-\frac{2}{x^2}$ (1 pkt) + obliczenie pochodnej $3x^2$ jako $6x$ (1 pkt) + poprawne zsumowanie wyniku (1 pkt). 3 pkt.

8. (3 pkt) Przykładowa odpowiedź: $f'(x) = 9x^2 - 4x + 5$.
Punktacja: Pochodna $3x^3$: $9x^2$ (1 pkt). Pochodna $-2x^2$: $-4x$ (1 pkt). Pozostałe: $+5$ (1 pkt).

9. (3 pkt) Przykładowa odpowiedź: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$, zera dla $x = 1$ i $x = 3$. Pochodna zmienia znak z dodatniego na ujemny w $x = 1$ (maksimum) i z ujemnego na dodatni w $x = 3$ (minimum). $f(1) = 1 - 6 + 9 = 4$, $f(3) = 27 - 54 + 27 = 0$. Maksimum lokalne: $f(1) = 4$. Minimum lokalne: $f(3) = 0$.
Punktacja: Obliczenie pochodnej $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ i wyznaczenie miejsc zerowych $x = 1$, $x = 3$ (1 pkt) + rozpoznanie rodzaju ekstremum na podstawie znaku pochodnej (1 pkt) + poprawne obliczenie wartości $f(1) = 4$ (maksimum) i $f(3) = 0$ (minimum) (1 pkt). 3 pkt.

10. (3 pkt) Przykładowa odpowiedź: $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, zera: $x = 0$, $x = 2$. $f''(x) = 6x - 6$: $f''(0) = -6 < 0$ (maksimum), $f''(2) = 6 > 0$ (minimum). Maksimum lokalne: $f(0) = 0$. Minimum lokalne: $f(2) = 8 - 12 = -4$.
Punktacja: Poprawne obliczenie pochodnej i jej miejsc zerowych (1pkt) + poprawne określenie rodzaju ekstremum (1pkt) + poprawne wartości ekstremów: maksimum f(0)=0, minimum f(2)=-4 (1pkt). 3 pkt.

Grupa B

1. (1 pkt) **A**

2. (1 pkt) **C**

3. (1 pkt) **B**

4. (1 pkt) **C**

5. (1 pkt) **B**

6. (1 pkt) **A**

7. (3 pkt) Przykładowa odpowiedź: $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$. Funkcja rośnie w $(-\infty, 1\rangle$ i $\langle 3, +\infty)$, a maleje w $\langle 1, 3\rangle$.
Punktacja: Obliczenie pochodnej $3x^2 - 12x + 9$ (1 pkt); wyznaczenie miejsc zerowych pochodnej 1 i 3 (1 pkt); poprawne przedziały monotoniczności (1 pkt). 3 pkt.

8. (3 pkt) Przykładowa odpowiedź: Obwód: $2x + 2y = 20 \Rightarrow y = 10 - x$. Pole: $A(x) = x(10-x) = 10x - x^2$. $A'(x) = 10 - 2x = 0 \Rightarrow x = 5$. Ogródek $5\ \mathrm{m} \times 5\ \mathrm{m}$, pole $25\ \mathrm{m}^2$.
Punktacja: Za wyrażenie pola jako funkcji jednej zmiennej: $A(x) = x(10-x)$ (1 pkt). Za wyznaczenie pochodnej i przyrównanie do zera: $A'(x) = 10 - 2x = 0$ (1 pkt). Za odpowiedź: kwadrat $5\ \mathrm{m} \times 5\ \mathrm{m}$, pole $25\ \mathrm{m}^2$ (1 pkt).

9. (3 pkt) Przykładowa odpowiedź: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. Miejsca zerowe: $x = -1$ i $x = 1$. Dla $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ funkcja rośnie, dla $x \in (-1, 1)$ maleje.
Punktacja: Poprawne obliczenie pochodnej (1pkt) + poprawne wyznaczenie miejsc zerowych pochodnej (1pkt) + poprawne określenie przedziałów monotoniczności (1pkt). 3 pkt.

10. (3 pkt) Przykładowa odpowiedź: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1)$. Miejsca zerowe pochodnej: $x = -1$, $x = 3$. Pochodna jest dodatnia dla $x \in (-\infty, -1)$ oraz dla $x \in (3, +\infty)$, a ujemna dla $x \in (-1, 3)$. Zatem funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty, -1]$ i $[3, +\infty)$ oraz malejąca w przedziale $[-1, 3]$.
Punktacja: Poprawne obliczenie pochodnej (1pkt) + wyznaczenie miejsc zerowych pochodnej (1pkt) + poprawne określenie przedziałów monotoniczności (1pkt). 3 pkt.

Skala ocen (orientacyjna, 18 pkt w każdej grupie)

bardzo dobry (5)	17–18 pkt
dobry (4)	14–16 pkt
dostateczny (3)	9–13 pkt
dopuszczający (2)	6–8 pkt
niedostateczny (1)	0–5 pkt

Progi: 90%, 75%, 50%, 30%. Progi w Twojej szkole mogą być inne. W zadaniach otwartych uznaj każdą odpowiedź poprawną merytorycznie, także sformułowaną inaczej niż przykład.

Ten sprawdzian online, z wyjaśnieniem każdej odpowiedzi: **matury-online.pl/sprawdzian/matematyka/rachunek-rozniczkowy**. Nauczyciele i korepetytorzy ułożą własną kartę z banku ponad 20 tys. zadań: **matury-online.pl/dla-korepetytorow**.